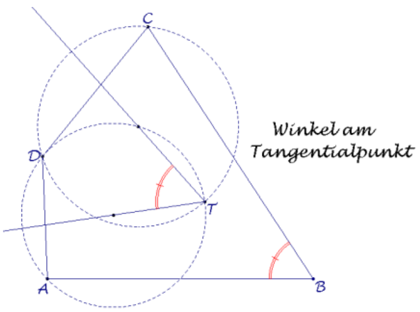
Winkel am Tangentialpunkt eines Vierecks

Eckart Schmidt

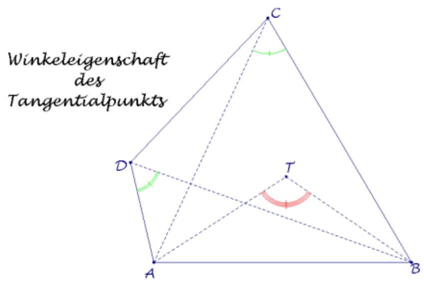
Der Tangentialpunkt – auch Bennett-Punkt [Cun;63] – ist ein merkwürdiger Punkt des Vierecks, dessen vielseitiger geometrische Bezug von R. Stärk [Stä] ausführlich dargestellt wird. Hier werden ergänzende Winkeleigenschaften aufgezeigt und eine analytische Berechnung in baryzentrischen Koordinaten angedeutet.



Der Tangentialpunkt

Zu einem Viereck *ABCD* gibt es einen Punkt *T* – von R. Stärk als Tangentialpunkt bezeichnet – von dem man jede Seite unter einem Blickwinkel sieht, der die Summe der Blickwinkel von den Ecken der Gegenseite ist *[Stä;19]*:

$$\angle ATB = \angle ACB + \angle ADB, \quad ... \quad (\mathit{orientiert} \;\; \mathrm{mod} \;\; 180^\circ)\,.$$



Konstruktiv und für eine analytische Behandlung zugänglicher dürfte die folgende Eigenschaft sein: Spiegelt man das isogonale Bild einer Ecke bzgl. des Restdreiecks an dessen Umkreis, so erhält man den Tangentialpunkt *[Stä;22]*.

Wählt man das Teildreieck *ABC* als Bezugsdreieck und gibt dem Tangentialpunkt die Winkelkoordinaten $T(\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c)$, dann hat die vierte Ecke des Vierecks die Winkelkoordinaten $T(\varphi_a - \alpha, \varphi_b - \beta, \varphi_c - \gamma)$, wenn α, β, γ die Innenwinkel des Dreiecks *ABC* sind. – Gibt man dem Tangentialpunkt die baryzentrischen Koordinaten $T(u:v:w)$, dann errechnet sich die vierte Ecke zu

$$D\Big(\frac{1}{(a^2-c^2)c^2uv-2S_Aa^2vw+(a^2-b^2)b^2wu+b^2c^2u^2}$$
$$:\frac{1}{(b^2-c^2)c^2uv+(b^2-a^2)a^2vw-2S_Bb^2wu+a^2c^2v^2}$$
$$:\frac{1}{-2S_Cc^2uv+(c^2-a^2)a^2vw+(c^2-b^2)b^2wu+a^2b^2w^2}\Big)\,.$$

Benutzt werden die Conway-Abkürzungen

$$2S_A=-a^2+b^2+c^2,\quad 2S_B=a^2-b^2+c^2,\quad 2S_C=a^2+b^2-c^2,$$
$$sowie\quad S=\sqrt{S_AS_B+S_BS_C+S_CS_A}=2\Delta.$$

Im Folgenden werden baryzentrische Koordinaten in dieser Weise benutzt.

Erste Kreismitten

Ein Viereck $ABCD$ mit Tangentialpunkt T habe die Seitengeraden $AB=a,\quad BC=b,\quad CD=c,\quad DA=d$ und die Diagonalen $AC=e,\quad BD=f$. Das Diagonaldreieck des Vierecks sei UVW mit

$$b\cap d=U(0:2S_Cc^2uv+a^2(a^2-c^2)vw+b^2(b^2-c^2)wu-a^2b^2w^2$$
$$:c^2(c^2-b^2)uv+a^2(a^2-b^2)vw+2b^2S_Bwu-a^2c^2v^2),$$
$$e\cap f=V(2S_Cc^2uv+a^2(a^2-c^2)vw+b^2(b^2-c^2)wu-a^2b^2w^2:0$$
$$:c^2(c^2-a^2)uv+2a^2S_Avw+b^2(b^2-a^2)wu-b^2c^2u^2),$$
$$a\cap c=W(0:c^2(c^2-b^2)uv+a^2(a^2-b^2)vw+2b^2S_Bwu-a^2c^2v^2)$$
$$:c^2(c^2-a^2)uv+2a^2S_Avw+b^2(b^2-a^2)wu-b^2c^2u^2)$$

und den Seitengeraden $UV=w,\quad VW=u,\quad WU=v$.

Betrachtet werden die Mittelpunkte von Kreisen durch zwei Ecken des Vierecks und den Tangentialpunkt:

$$z.B.\quad M_c\quad ist\quad Mittelpukt\quad von\quad k(A,B,T)\,.$$

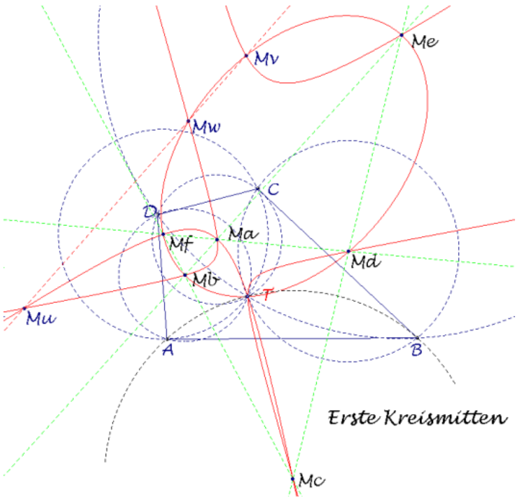
Dabei orientiert sich die Indizierung $c\,(=CD)$ zur besseren Formulierung der Ergebnisse an der Gegenseite von AB. Zwei Beispiele:

$$M_c(S_Bc^2uv+a^2c^2vw+(S_AS_B+S^2)wu+S_Aa^2w^2$$
$$:S_Ac^2uv+(S_AS_B+S^2)vw+b^2c^2wu+S_Bb^2w^2$$
$$:-c^2(c^2uv+S_Bvw+S_Awu-S_Cw^2))\,,$$
$$M_d(-a^2(S_Buv+a^2vw+S_Cwu-S_Au^2)$$
$$:(S_BS_C+S^2)uv+S_Ca^2vw+a^2b^2wu+S_Bb^2u^2$$
$$:a^2c^2uv+S_Ba^2vw+(S_BS_C+S^2)wu+S_Cc^2u^2)\,.$$

Für die Radien dieser Kreise gilt z.B.

$$TM_c = \sqrt{\frac{c^2(c^2u^2+2S_Bwu+a^2w^2)(c^2v^2+2S_Avw+b^2w^2)}{4S^2w^2(u+v+w)^2}}$$
$$= \frac{TA\cdot TB}{2\,abst(T,AB)}\,.$$

In der koordinatenunabhängigen Form ist das Ergebnis verallgemeinerungsfähig.



Es gibt sechs Erste Kreismitten, die zu Tripeln auf den Mittelsenkrechten *m(X,T)* von *A, B, C, D* und *T* liegen:

$$M_b, M_c, M_f \in m(A,T); \qquad M_c, M_d, M_e \in m(B,T);$$
$$M_a, M_d, M_f \in m(C,T); \qquad M_a, M_b, M_e \in m(D,T).$$

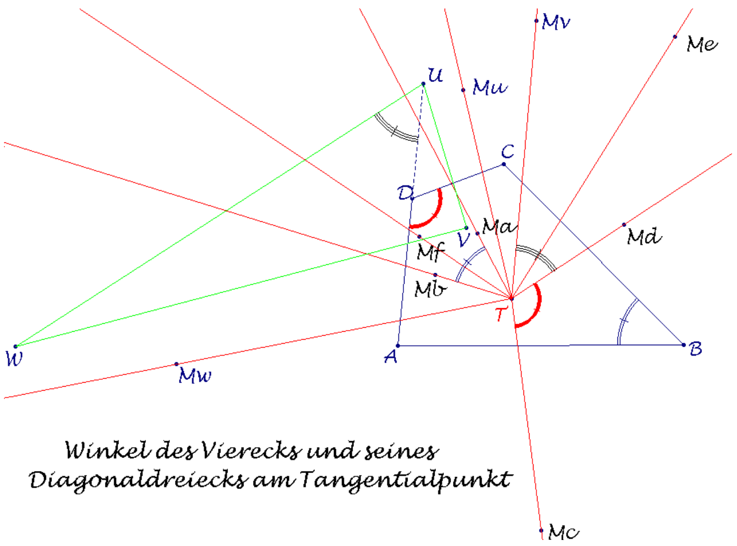
Betrachtet man jetzt Kegelschnitte durch die Punktequintupel $(M_b, M_d, M_e, M_f, T), (M_a, M_b, M_c, M_d, T), (M_a, M_b, M_e, M_f, T)$, so erhält man in den vierten Schnitten dieser drei Kegelschnitte drei weitere kollineare Punkte M_u, M_v, M_w. Dabei ist TM_u Tangente in *T* an den ersten Kegelschnitt und TM_v und TM_w sind Tangenten in *T* an den zweiten und dritten Kegelschnitt.

Verbindet man diese Ersten Kreismitten mit dem Tangentialpunkt und bezeichnet die Geraden mit $g_x = TM_x$, dann findet man die Winkel des Vierecks und des Diagonaldreiecks in den Schnittwinkeln dieser Geraden wieder:

$$\boxed{\angle(g_x, g_y) \;=\; \angle(y,x) \quad \textit{für} \quad x, y \in \{a,b,c,d,e,f,u,v,w\}}$$

Beispiel:

$$\angle ADC = \angle(d,c) = \angle(g_c, g_d) = \angle M_cTM_d$$
$$= arc\cot\left(\frac{a^2S_Avw - b^2S_Bwu + c^2S_Cuv + a^2c^2v^2}{S(a^2vw + b^2wu + c^2uv)}\right).$$



Winkel des Vierecks und seines Diagonaldreiecks am Tangentialpunkt

Zweite Kreismitten

In diesem Abschnitt werden Tangentialpunkte zu zwei Viereckpunkten und zwei nicht kollinearen Punkten des Diagonaldreiecks betrachtet:

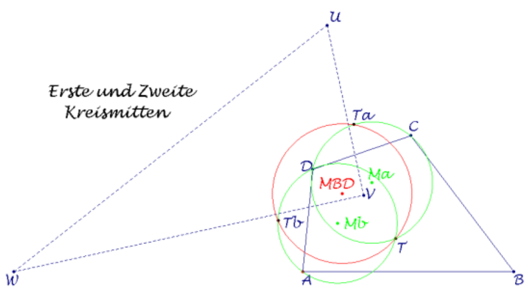
$$T_a = T(C,D,U,V), \quad T_b = T(D,A,V,W), \quad T_c = T(A,B,U,V),$$
$$T_d = T(B,C,V,W), \quad T_e = T(B,D,W,U), \quad T_f = T(A,C,W,U).$$

Auch hier orientiert sich die Indizierung an der Gegenseite. Z.B.

$$T_c(-2a^2w(u+w)+2b^2wu-c^2u(u-v+w)$$
$$:2a^2vw-2b^2w(v+w)-c^2v(-u+v+w):c^2w(u+v+w).$$
$$T_d(-a^2u(u+v+w):a^2v(u+v-w)+2b^2u(u+v)-2c^2uv$$
$$:a^2w(u-v+w)-2b^2uw+2c^2u(u+w).$$
$$T_f(-2a^2v(u+v)-b^2u(u+v-w)+2c^2uv:b^2v(u+v+w)$$
$$:2a^2vw-b^2w(-u+v+w)-2c^2v(v+w)).$$

Diese Tangentialpunkte liegen auf den Kreisen um die Ersten Kreismitten durch den Tangentialpunkt T:

$$\boxed{T_x \text{ liegt auf einem Kreis um } M_x \text{ durch } T \text{ für } x \in \{a,b,c,d,e,f\}.}$$

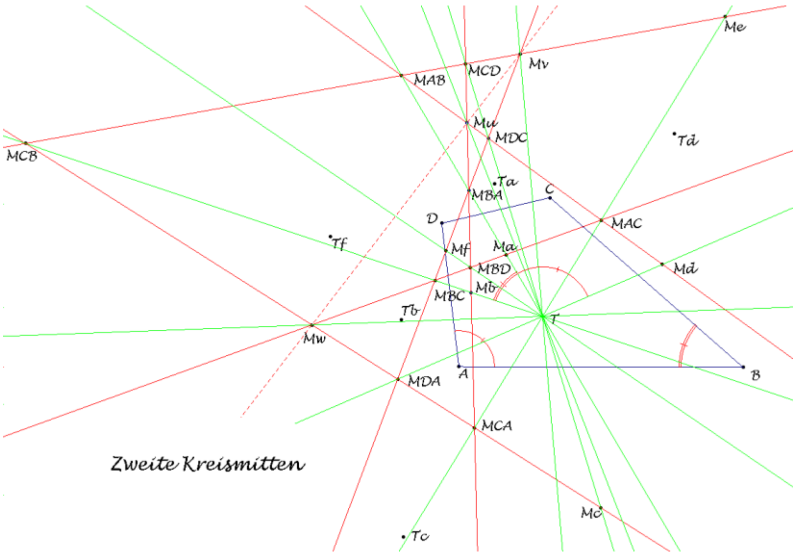


Die Mittelpunkte von Kreisen zu jeweils zwei dieser Tangentialpunkte und dem Tangentialpunkt T des Vierecks seien als Zweite Kreismitten angesprochen (siehe Tabelle):

T	T_a	T_b	T_c	T_d	T_e	T_f
T_a	-	M_{BD}	M_w	M_{AC}	M_{AD}	M_{BC}
T_b	M_{BD}	-	M_{CA}	M_u	M_{CD}	M_{BA}
T_c	M_w	M_{CA}	-	M_{DB}	M_{CB}	M_{DA}
T_d	M_{AC}	M_u	M_{DB}	-	M_{AB}	M_{DC}
T_e	M_{AD}	M_{CD}	M_{CB}	M_{AB}	-	M_v
T_f	M_{BC}	M_{BA}	M_{DA}	M_{DC}	M_v	-

Beispiel: M_{DA} ist Mitte des Kreises $k(T,T_c,T_f)$:

$$\begin{aligned}
&M_{DA}(-v(S_B u + a^2 w)(a^2c^2v^2 + S_A S_C wu) - w(a^2 v + S_C u)(a^2b^2w^2 + S_A S_B uv)\\
&- S^2 u(2a^2vw(u+v+w) + b^2u^2w + c^2u^2v) - S_B S_C u^2(b^2w^2 + c^2v^2) - 2a^4 S_A v^2 w^2)\\
&\quad : (v(S_A u - S_B v + S_C w) + b^2uw)(S_A a^2 vw + S_B b^2 wu - S_C c^2 uv + a^2b^2w^2)\\
&\quad : (w(S_A u + S_B v - S_C w + c^2uv)(S_A a^2 vw - S_B b^2 wu + S_C c^2 uv + a^2c^2v^2)).
\end{aligned}$$



Die im vorigen Abschnitt herausgearbeiteten Punkte M_u, M_v, M_w treten hier wieder auf:

$$M_u = M(T,T_b,T_d), \quad M_v = M(T,T_e,T_f), \quad M_w = M(T,T_a,T_c)\,.$$

Die Zweiten Kreismitten liegen zeilen- bzw. spaltenweise auf den Mittelsenkrechten $m(T,T_x)$, die auch die Ersten Kreismitten enthalten:

$$\begin{aligned}
m(T,T_a):&\quad M_a, M_w, M_{BC}, M_{AD}, M_{AC}, M_{BD}\\
m(T,T_b):&\quad M_b, M_u, M_{BA}, M_{CD}, M_{CA}, M_{BD}\\
m(T,T_c):&\quad M_c, M_w, M_{CB}, M_{DA}, M_{CA}, M_{DB}\\
m(T,T_d):&\quad M_d, M_u, M_{AB}, M_{DC}, M_{AC}, M_{DB}\\
m(T,T_e):&\quad M_e, M_v, M_{AB}, M_{CB}, M_{CD}, M_{AD}\\
m(T,T_f):&\quad M_f, M_v, M_{BA}, M_{BC}, M_{DC}, M_{DA}\,.
\end{aligned}$$

Bemerkenswerter sind die Kollinearitäten auf den schon angesprochenen Geraden durch den Tangentialpunkt T:

$$g_a: \; T, M_a, M_{AB}, M_{BA}; \qquad g_b: \; T, M_b, M_{BC}, M_{CB};$$
$$g_c: \; T, M_c, M_{CD}, M_{DC}; \qquad g_d: \; T, M_d, M_{DA}, M_{AD};$$
$$g_e: \; T, M_e, M_{AC}, M_{CA}; \qquad g_f: \; T, M_f, M_{BD}, M_{DB}.$$

Somit gilt für die Winkel am Tangentialpunkt:

Für die Ersten Kreismitten

$$\angle M_x T M_y = \angle(y, x) \quad \text{für} \quad x, y \in \{a, b, c, d, e, f, u, v\}$$

und für die Zweiten Kreismitten

$$\angle M_{XY} T M_{PQ} = \angle(PQ, XY) \quad \text{für} \quad X, Y, P, Q \in \{A, B, C, D\}.$$

Auch über Teilverhältnisse auf den Geraden durch T kann eine Aussage gemacht werden. Z.B. teilt die Zweite Kreismitte M_{DA} die Strecke zwischen Tangentialpunkt T und der kollinearen Ersten Kreismitte M_d in dem Verhältnis

$$\frac{TM_{DA}}{M_{DA}M_d} = \frac{2u(c^2v^2 + 2S_A vw + b^2w^2)}{(u+v+w)(a^2vw + b^2wu + c^2uv)}$$
$$= 2\frac{abst(T, BC)}{abst(A, BC)} \frac{TA^2}{pot(T, ABC)} .$$

Dieses Ergebnis ist in seiner koordinatenunabhängigen Aussage für jede Permutation der Ecken A, B, C, D des Vierecks zu verallgemeinern, wenn man die entsprechende Erste Kreismitte wählt. So teilt die Zweite Kreismitte M_{AC} die Strecke TM_e im Verhältnis

$$2\frac{abst(T, BD)}{abst(C, BD)} \frac{TC^2}{pot(T, BCD)} .$$

Literatur

[Cun] H.M. Cundy and C.F. Parry: Geometrical properties of some Euler and circular cubics. Part 2. − Journal of Geometry 68, 2000, 63.

[Stä] Roland Stärk: Ein merkwürdiger Punkt des Vierecks. − PM 1/44. Jg. 2002, 19.

Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt.de
eckart_schmidt@t-online.de